数理解析研究所講究録
第 1739 巻 2011 年 1-14

高木貞治の数学教育思想

立教大学名誉教授　公田　藏　(Osamu Kota)
Professor Emeritus, Rikkyo University

1.

高木貞治は数学教育に関する成書は残さなかったが，早くから数学教育に関心をもっていた．中等教育用の教科書の編纂（最初の発行は 1904（明治 37）年）に関わったことはその一例である．高木の数学や数学教育についての考えは，著書，特にその緒言や序文，あるいはエセーから知ることができる[1]．

たとえば，著書『数学の自由性』（初版は 1949（昭和 24）年の出版であるが，これにいくつかのエセーや講演記録を追加し，現代表記に改めたものがものが [5] である．以下の引用は [5] による）は，1930 年代半ばから 40 年代半ば過ぎまでに書かれたものや，その時期になされた講演をまとめたものであるが，そこには数学や当時の数学教育に対する高木の考え，特に数学の自由性，実用性，応用と実用，幾何教育の問題，発見的方法などについての考えや，当時の状況に対する批判が述べられている．60 年以上前に書かれたものや，話されたものであるが，これまでの数学教育を顧み，これからの数学教育を考える上で参考となる点が多い．

著書の表題となった「数学の自由性」は 1948（昭和 23）年になされた講演であるが，まず「数学の本質はその自由性にあり」という G. Cantor の言葉の由来を説明し，ついで，数学の「自由性」について，

> もちろん自由とはいえ，論理にはしばられます．しかし論理に忠実でありさえすれば，その他のもの — 習慣とか伝統というものに対してつまらぬ顧慮をはらう必要はないというのです．したがって自由というものの根柢には確固とした信念がいります。（中略）　そしてこれは何も数学だけに限ったことではないのであります．

と述べている．数学の実用性については,「彼理憤慨」(1936 年 7 月）の中で，彼理（ペリー，John Perry）の数学教育改良の主張について，

> 核心は数学の実用性にある．それは結構なことである．もちろんすべての学問は実用的であるべきだ．特急現金主義の実用的は実効を挙げ得ないから，実際は不実用的であろう．

と述べている．高木は Perry の主張に基本的には賛意を表しているが，急激な改革や一方に偏した極端な考え方には批判的である．また，実用性については，すぐ目先の役に立つことだけを扱うことには批判的である．講演「数学の実用性」(1943（昭和 18）年）において，高木は，まず「このお話の標題の数学の実用性ということは，水の実用性，空気の実用性というようなもので，あまり馬鹿馬鹿しいとも思いましたが」と述べ，いくつかの「例」によって数学の実用性・有用性について話した後に，

[1] 高木貞治は筆者が教えを受けた先生方の師に当たる方であり，その意味からは高木貞治先生と敬称をつけるべきであると考える．その他の方についても同様である．しかし，本稿ではこれらの方々はすべて歴史上の人物として取り扱い，人名の敬称を省略した．

> さて，しからば実用性はどこから来るかというと，それは完全な理解，徹底的な理解から来る．徹底的な理解の上にのみ実用性がある．それなくしては，実用性は得られないというのが，私の考えであります．
>
> そもそも数学の応用といえば，数学的精神の発揮，つまり数学的な考え方の活用が第一なのだが，多くの実際家は，数字が出てくる所から，数学の実用性が始まると思っている．

と述べ，数字計算に関連してGaussの話をし，その後で，

> ガウスの話をしたのは，実用は物に在らず，人に在り，徹底的なる理解の上に於いてのみ，真の実用は可能である，ということの一例を挙げたのであります．吾々凡人にはガウスの真似は出来ない．しかしガウスの精神を真似ることは出来る．付け焼刃は駄目だ．たとえナマクラでも，自分の手に合うものを十分に活用するように心掛けるのであります．世ニ用アリヤ，ナシヤなどと大それたことを考えないで，身分相応のところで最善を尽くすこと，これが吾々に与えられたる唯一の途でありましょう．

と結んでいる．当時は戦時中で，すぐ戦時下において役に立つことのみが価値ありとされ，それ以外のものは不急不要のものとして価値が認められなかった時代であることを考えると，「徹底的なる理解の上に於いてのみ，真の実用は可能である」という言葉の重みを感じるのである．

高木の数学教育に対する考え方は，大まかにいえば，

(1)　教授者は数学，特に教授すべき内容については，十分なる知識と理解が必要である．

(2)　中等教育の数学においては，分科ごとに孤立した形での教育は適当ではない．

(3)　過去の因習にとらわれることなく，数学の最近の進歩・発展も考慮に入れて，本質的な事項を適切な順序・方法で教授すべきである．

(4)　過度の厳密性や形式化，抽象化は避けるべきである．

(5)　数学の実用性は，数学の徹底的な理解の上にのみある．

ということができよう．高木は，東大で，学生に対して「エッセンシャルとトリヴィアルの区別」ということをよくいわれたとのことである（[13]）．何が本質的であるかを見分けることと，本質的な事項に対しての徹底的な理解，これは数学を学んでいく際の基本であるが，高木の数学教育に対する考え方の根幹でもあった．また，数学の「自由性」も，高木の数学と数学教育についての考え方の根幹となっている．しかし，数学教育に関しては，高木は極端な考え方や，急激な改革には批判的である．(3) に関しては，高木は，順を追って学んでいくだけではなく，道さえ取り違えないように気をつけていれば，別の道をたどったり，まず上空から全体を一通り見渡すという方法もあるだろうと述べている（たとえば [5]，pp. 60 – 61，110 – 111；[3] の序言など）．

高木の数学教育に対する考え方は，明治末にはすでに大枠が形作られていたと考える．以下，明治期の高木の著作を通してこのことを示し，あわせて高木の幾何教科書と，幾何教育についての考え方に触れる．このことについてはこれまであまり注目されてこなかったと考える．なお，高木の数学教育に対する考えについて論じたものとしては，たとえば [10]，[11]，[12] がある．

２.

高木が数学教育について記した初期のもの（おそらく最初のもの）としては，『新式算術講義』の緒言（1904（明治37）年6月）がある．高木は緒言の中で次のように記している．

> 普通教育に於ける算術の論ずる所は一見卑近なるが如しと雖も、若し深く問題の根柢に穿入せんとするときは、必しも然らず。夫れ教師は其の教ふる所の学科につきて含蓄ある知識を要す。算術教師が算術の知識を求むる範囲、其教ふる児童の教科用書と同一程度の者に限らるゝこと、極めて危殆なりと謂ふべし。確実なる知識の欠乏を補ふに、教授法の経験を以てせんとするは、「無き袖を振はん」とするなり。是を以て此書は広く算術の教授に従事する教師諸氏の中に其読者を求めんと欲す。
> 又数学を専攻せんとする学生にありても、目下の状態に於ては、其算術の知識は幼時普通教育によりて得たる所に限られ、漸く進んで稍高等なる数学諸分科の修業に入るに当りても、数学の根源に関せる問題を回顧して、精密に之を復習するの遑なきが如し。斯くの如くなれば、其知識は堅牢なる地盤を欠くが故に、学ぶ所愈進むに随ひ、知る所愈不確実となる。是寔に憂ふべし。偶々此欠点を覚りて自ら之を補充せんとする者ありとも、恰当なる参考書の欠如せるが為に感ずる不便決して少小ならず。
> 　　（中略）
> 高等数学の論ずる所は概して通俗の説明に適せずと雖も、凡そ極めて根本的なる問題は、之を解決すること非常に困難なると共に、之を理会することは、却て意外に容易なり。無理数の定義も亦此種の問題に属せり。器械的に算式を把玩するを以て数学の能事畢れりとする者、固より斯の如き問題に関渉あるべからず。然れども一般の健全なる理解力及び成熟せる判断力を以て之に臨むときは、問題の要点を攫取すること決して難からず。

前段は，教師たる者は教える内容について，その本源，本質を踏まえた十分な知識が必要であることを述べたものである．後段は，数学における極めて根本的な問題は，問題そのものの要点を理解することはさして難しくないことを述べている．数学を学ぶ（したがって，数学を教える）に際しては,「器械的に算式を把玩するを以て数学の能事畢れりとする」だけでは不十分であることが言外に述べられている．

3．

ここで当時の中学校の数学教育の状況について簡単に記しておく．

わが国が近代的な教育制度を採用したのは，明治5（1872）年の「学制」によってであるが，学制と関連の諸法令は制定されても，当初はそれを完全に実施するのには無理があり，明治初期には法令もしばしば改められた．明治19（1886）年に師範学校令，小学校令，中学校令，諸学校通則が制定され，関連の諸法令も制定されて，学校制度は整備され，教育内容が充実していったのである．明治19年の中学校令の第一条には「中学校ハ実業ニ就カント欲シ又ハ高等ノ学校ニ入ラント欲スルモノニ須要ナル教育ヲ爲ス所トス」とある．中学校は尋常中学校と高等中学校とに分けられ，高等中学校は文部大臣が管理し（いわゆる「官立」で）全国で5校，尋常中学校については，第六条に「尋常中学校ハ各府県ニ於テ便宜之ヲ設置スルコトヲ得但其地方税ノ支辨又ハ補助ニ係ルモノハ各府県一箇所ニ限ルヘシ」と規定されていた[2]．修業年限は，尋常中学校は5年，高等中学校は2年である．尋常中学校の数学の内容は，算術，代数，幾何，三角法であった．明治19年の文部省令「尋常中学校ノ学科及其程度」によれば，代数は順列，組合せ，二項定理まで

[2]明治19年の中学校令で，府県立尋常中学校の校数について制限を設けたのは，財政的な裏付けのない，質の粗悪な中学校の濫立を防止するためであった．なお，高等中学校については，官立の5校のほかに，諸学校通則第一条に基づく「準官立」の形で2校（鹿児島（造士館）と山口）が設置された．

で，三角法には球面三角法が含まれていたが,「尋常中学校ノ学科及其程度」は明治27年に改正され，球面三角法は尋常中学校の内容から除かれた．

明治24年12月，中学校令が改正され，第六条は「尋常中学校ハ各府県ニ於テ一校ヲ設置スヘキモノトス但土地ノ情況ニ依リ文部大臣ノ許可ヲ得テ数校ヲ設置シ又ハ本文ノ一校ヲ設置セサルコトヲ得」と改められた．

明治27年6月,「高等学校令」が制定・公布され，高等中学校は高等学校と改称され，修業年限も改められた（帝国大学への進学のための課程「高等学校大学予科」の修業年限は3年となった）．

明治32（1899）年2月，中学校令が全面改正され，尋常中学校が中学校となった．改正された中学校令の，最初の二条は次の通りである．

第一条　中学校ハ男子ニ須要ナル高等普通教育ヲ爲スヲ以テ目的トス

第二条　北海道及府県ニ於テハ土地ノ情況ニ応シ一箇以上ノ中学校ヲ設置スヘシ

文部大臣ハ必要ト認ムル場合ニ於テ府県ニ中学校ノ増設ヲ命スルコトヲ得

ついで関連の諸法令が制定・公布された．明治34年3月には「中学校令施行規則」が制定された.「施行規則」には各学科の目的と内容の大枠も示されている．数学については，第七条に

数学ハ数量ノ関係ヲ明ニシ計算ニ習熟セシメ兼テ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス

数学ハ算術、代数初歩及平面幾何ヲ授クヘシ

と記されている．しかし，この中学校令施行規則に示された数学の内容は，それまでの教授内容から立体幾何と三角法を除き，代数も「初歩」に限るという，教授内容の大幅削減がなされたものであったため，菊池大麓（当時は帝国大学総長）はこれに異を唱えたのである．翌明治35（1902）年2月，中学校令施行規則が改正され，数学の内容（第七条第二項）については，

数学ハ算術、代数幾何及三角法ヲ授クヘシ

と改められた．あわせて「中学校教授要目」が制定された．このときの文部大臣は菊池大麓である．数学の教授要目は算術，代数，幾何，三角法に分けて記され，最後に「教授上ノ注意」全11項目が記されているが，その中に次の文言がある．

一　数学ヲ授クルニハ常ニ精確ナル言語ヲ用ヒテ法則、命題等ノ宣言証明ヲナシ正確ニ理会セシメンコトヲ力ムヘシ

五　算術ヲ授クル際法則ノ理由ヲ充分ニ理会セシメ難キ場合ニ於テハ単ニ其ノ一端ヲ指摘スルニ止メ直ニ法則其ノ物ニ移リ其ノ厳格ナル理由ノ説明ハ之ヲ代数ニ譲ルヘシ

七　幾何ヲ授クルニハ論理ノ厳格ヲ重ンスヘシ例之ハ比例論ヲ授クル場合ノ如キ濫ニ簡易ニ就カントスル為之ヲ省略シ若ハ之ヲ曖昧ニ附シ去ル弊ニ陥ラサランコトヲ要ス但生徒学力ノ進度ニ依リ一時之ヲ仮定シテ後回シトナスハ妨ゲナシ

この教授要目は，菊池と藤澤利喜太郎，特に藤澤の数学教育に対する考え方が強く反映されている．

なお，中学校（尋常中学校）では，明治20年代にはまだ外国語（英語）の書物をそのまま教科書として使用する場合があった．日本語の書物による場合も，外国書の邦訳や翻案である場合がかなりあったのである．

4．

高木は，留学から帰国後間もない頃から，中等教育用の教科書の編纂に関わった．最初に出版されたのは，明治37（1904）年発行の中学校用の教科書『普通教育算術教科書』,『普通教育代数教科書』である．いずれも上下二巻からなる.『普通教育代数教科書』の上巻の「例言」の中には，次の文言がある．

> 普通教育に於ける代数学教授の目的は，生徒をして文字を使用して卑近なる問題を自由に解釈する能力を取得せしむるを以て足れりとすべし。
>
> 是故に厳密なる抽象的の論証は此書の最も忌避する所にして，常に算術を回顧して応用上の問題を明透周密に処理することは，其の最も力を致せる所なり。

同書の，明治42（1909）年の修正改版の巻頭にある「修正改版につき」には，次のような記述がある．

> 三　整式及び分数式の四則は，全く方程式解法の準備と見做し，方程式の解法に於て遭遇することなきが如き複雑なる代数計算を削除せると同時に，断えず方程式に応用せらるるが如き簡単なる有理式の取扱には一層力を用ひたること。
>
> 四　前項の趣意に基き，多項式の乗法及び除法の複雑なる場合は，之を第四編に転入し，又最大公約数及び最小公倍数の複雑なる計算法は，別に一章を設けて之を説き，便宜其教授を省略又は延期することを得べきやう配置せること。蓋し此等の事項は初級生をして充分正確に其意義を理会せしむること到底不可能にして，且つ応用の機会稀なるが故に，実は全く中学校の課程中より削除して妨げなきものなること，著者の信ずる所なり。
>
> 六　比例の篇に於て，通約すべからざる量，及び互に比例する量に関し特に一章を設け，算術，幾何学及び物理学との連絡を図れること。
>
> 七　練習問題を淘汰し，成るべく標準的の問題を存置し，同工異曲のものの重出することを避け，数の少くして内容の豊富なるを図れること。

「修正改版につき」の第四項には,「ユークリッドの互除法」についての高木の考えが述べられている．藤澤は，ユークリッドの互除法について，これは数学で非常に大事な方法であるから，算術でも，困難であるとして省かずに，教授されることを希望すると述べている（[6]，pp. 194－195）[3]．第六項の「互に比例する量」は，古典的な比例式の取り扱いから一歩を進めて，函数関係としての正比例，反比例を簡単に説明したことを指している（ただし，函数という用語やグラフは導入されていない．函数やグラフが中等教育に取り入れられてくるのは大正になってからである）．第六項には，科目相互間の連絡を図ったことも記されている．これらは菊池や藤澤とはいささか意見を異にするところである．菊池や藤澤，特に菊池は，数学の各分科の固有の方法を重視している．科目相互間の連絡に関しては，同じ時期の林鶴一の教科書でも，ある程度の配慮がなされている．林の教科書のシリーズ名は『新撰統合数学教科書』である.「統合」という言葉が用いられていることは注目してよいであろう．林は「ユークリッドの比例論」の教授にも批判的である[4]．菊池・藤澤の世代と，林・高木の世代との考え方の相違であると考える．

---

[3]前掲の明治35年の中学校数学教授要目の「教授上ノ注意」五は，ユークリッドの互除法などの取り扱いについて記されたものである．

[4]林鶴一編著『新撰幾何学教科書［平面之部］』の序文（明治38年10月）には,「初等幾何学書ノ現時ニ行ハルヽモノ尠カラザレドモ，多クハ其主義ニ因循ノ点多ク其比例論ハ徒ニ冗繁ニシテ学生ノ脳力ニ適セズ，其他計算ニ関スル応用問題ニ乏シキガ如キモ亦其欠点ナリトス」とある．

5.

高木の著書に『高等教育　代数学』(1906（明治39）年）がある．表題からは高等学校用の教科書のように見えるが，そうではなく，中等学校用の教科書でもない．中扉には，邦文の表題に加えて，“Lehrbuch der Algebra” というドイツ語が記されている．緒言には次のように記されている．

此書ハ　（中略）　普通教育ノ程度以上ニ於テ，初等代数学ノ一部分ヲ説カントスルモノナリ．然レドモ取材ノ範囲ハ初等数学ニ所謂代数学ノ埒外ニ逸スルコトナク，唯少シク論証ヲ厳密ニシ，問題ノ解釈ヲ詳細ニセル点ニ於テ，稍之ニ凌駕セルニ過ギズ．

純正代数学ノ知識ト趣味ノ本邦数学界ニ普及センコトハ，編者ノ切望スル所ナリ．然レドモ普通教育ニ所謂代数学又ハ欧米ノ初等教科書ニ所謂あるぜぶらハ，数学ニ於テあるぜぶらト称スル所ノ，吾人カ上文仮ニ純正代数学ト称セル所ノモノトハ，啻ニ程度ノ高下ノミニアラズシテ，又実ニ其内容ニ於テ大ナル径庭アリ．

吾人ノ所謂純正代数学ハ整数論，函数論及ビ幾何学ト駢立セル数学大分科ノ一ニシテ，初等教科ニ所謂代数学ハ幾何学ヲ除キタル数学全部ヨリ拾集セル，凡テノ卑近ナル事実ノ無統一ナル団合ニ過キズ，其範囲ハ論理的ノ分類ニヨリテ定メラレタルモノニ非ズシテ，因習上自然ニ形成セラレタルモノナリ，随テ各国其教育課程，試験制度等ニ由リ，自ラ多少ノ異同アルヲ免レズ．

（中略）

此書ハ初等教科ノ代数学ト所謂純正代数学トノ中間ニ介在シテ，初等代数学ノ問題ヲ解釈スルノ間ニ於テ，純正代数学ノ精神ヲ発揮センコトヲ勉メタリ．

本書ノ内容ハ之ヲ三部ニ分ツコトヲ得．其一ハ全編ノ緒論ニシテ代数的計算ノ要点ヲ略説ス．而モ根本的ニ数ノ観念及ヒ算法ノ原理ヲ説クコトハ，此書ニ予期セラルヽ程度ヲ超越スルコト甚シキカ故ニ，全ク之ヲ避ケタリ．第二部ハ二次，三元ヲ超エサル方程式ノ解法ヲ論シ，本書ノ大部分ヲ占ム．特ニ聯立三元一次方程式及ヒ聯立二元二次方程式ハ初等ノ方法ニヨリテ為シ得ル限リ，最詳密ニ之ヲ叙ベタリ．是レ其本書ノ目的トスル所ニ最モ適切ナル材料ナルニ由ル．最終ノ一部ハ最簡単ナル有理式ノ変動ヲ論ス．厳密ニ言フトキハ，コハ函数論上ノ問題ニシテ初等ノ方法ニヨリテ充分之ヲ解釈センコトハ頗ル困難ナリト雖，習慣上，初等代数学ニ於テ其一班ヲ説クヲ常トシ，且方程式ノ理論ノ側面観トシテハ，最有効ナルモノナルカ故ニ，此書又之ヲ欠クコトヲ得サリシナリ．

冪根，級数，比例，組ミ合ハセ等，普通教育ノ代数教科ニ属スル事項ニシテ，此書ニ説クコトヲ得サリシモノ少ナカラズ．　（下略）

緒言の末尾に，「理学士藤原松三郎君カ本書ノ編纂ニ与ヘラレタル多大ノ幇助ハ編者ノ深ク謝スル所ナリ」とある．

本文の叙述は大体において「講義式」で，記述は丁寧である．三文字の対称式，交代式について，たとえば，$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ のように，文字を輪環の順に書くほうが，$a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)$ と書くより見やすいことを述べた後に，

勿論此処ニ言ヘル如キコトハ，決シテ拘泥スベキコトニアラズ，又一見甚タ些細ナルニ似タリト雖モ，カヽル些細ナル点ニツキテモ意ヲ用ヰルヘキ余地アルコトハ，

> 篤学ノ士ノ注意ヲ要スル所ナルヘキカ．是ニ於テ吾人ハ我読者ト共ニ次ノ宣言ヲナスベシ：
>
> 代数学ニ於テ数ヲ表スニハ，如何ナル文字ヲモ用ヰ得ヘキ自由アリ．宜シク此ノ自由ヲ善用シテ，記法ノ成ルヘク便利ニ，成ルヘク明透ナルヲ勉ムヘキナリ．

と記している（同書，p. 33）．最後の2行は,「数学の自由性」に関わる言明である．

高木の『高等教育　代数学』（明治39年9月発行）と，藤澤利喜太郎『続初等代数学教科書』（明治33年5月発行）とを比較すれば，取り扱われている内容は藤澤のほうが多岐にわたるが，記述は高木のほうが丁寧である．これは，前者が教科書であるのに対して，後者は自修書であることによると考える．

藤澤は「函数」という用語は用いているが，グラフにはふれていない．他方，高木は，函数という用語は用いていないが,「簡単ナル有理式ノ変動」を扱うに際して，初等的な有理函数に限っての説明ではあるが，函数の概念とグラフについて丁寧に説明している．当時の日本語で読める数学書の中で，函数の概念とグラフについての説明は，函数という用語は出さず，簡単な有理函数に限っての説明ではあるが，高木のこの本が最も明確で丁寧である．高木は緒言で「有理式ノ変動」について,「方程式ノ理論ノ側面観トシテハ，最有効ナルモノ」と記しているが，これは函数の概念やグラフの数学教育上における意義についての言明である．

連立一次方程式の不定や不能の場合の吟味は，高木のほうは明確に行列の階数を意識している記述である．その他，無理方程式についても，取り扱いに相違がある．高木の取り扱いの背後には,（複素変数の）函数 $\sqrt{z}$ は2価函数であることがある．

6．

明治43年5月31日，師範学校教授要目が制定された．数学については，内容は算術，代数，幾何（鋭角の三角函数，直角三角形の解法を含む），および小学校に於ける教授法であるが（ほかに男子に対しては簿記が加えられている），中学校教授要目とは異なり，科目に分けずに学年ごとの内容が示されているだけであり，末尾の「注意」（全5項目）の中の一つに,「算術、代数、及幾何ハ相互ノ聯絡ヲ図リ殊ニ代数及幾何ヲ授クル際算術ニ関スル事項ヲ正確ニ理解セシムヘシ」とある．

この教授要目に準拠して編纂された高木の数学教科書が，明治43年の『師範教育数学教科書［算術及代数］』,『師範教育数学教科書［平面幾何］』,『師範教育数学教科書［立体幾何］』である．『師範教育数学教科書［算術及代数］』の「例言」（明治43年10月）には次のような記述がある．

> 中等教育の数学科に於て算術，代数，幾何，三角法といふが如き分科を立つることを廃止して，これらを相連絡せる一科となすべきことは，編者が年来懐抱せる意見にして，新定の師範学校教授要目によりて其が実際の教授に試験せらるるの機会を得たることは，編者の私に喜ぶところなり。

ここに「編者が年来懐抱せる意見にして」とあるが，高木がいつ頃からこのような考えをもつようになったかについて，高木自身が記しているものは見当たらないので，正確にはわからないが，ゲッチンゲンでのKleinの講義に接してからであると思われる．しかし，もっと早い時期かもしれない．

7．

明治44年7月，中学校令施行規則が改正され，第七条第一項は次のように改められた．

> 数学ハ数量ニ関スル知識ヲ与ヘ計算ニ習熟セシメ応用ヲ自在ナラシメ兼テ思考ヲ精確ナラシムルヲ以テ要旨トス

「応用ヲ自在ナラシメ」という文言が入ったことは，注目してよいと考える．

あわせて中学校教授要目が改正された．改正された教授要目では，数学の教授要目の冒頭に

> 数学ハ算術・代数・幾何・三角法ニ分チ各学年ニ対シテ教授事項ヲ配当スト雖モ常ニ相互ノ聯絡ヲ図リテ教授シ特ニ算術ニ関スル複雑ナル事項ハ代数及ビ幾何ヲ授クル場合ニ之ヲ教授スヘシ

とある．「常ニ相互ノ聯絡ヲ図リテ教授シ」という文言が記されたことも注目すべきであろう．数学の教授要目の最後には「注意」3 項目が記されている．

> 一　数学ハ正確ニ理会セシムルノミナラス計算ニ熟シ応用ニ慣レシメンコトヲ要ス
> 二　算術ニ於テハ暗算及筆算ノ外ニ珠算ヲ併セ課スルモ妨ナシ
> 三　幾何ニ於ケル軌跡・作図・面積及体積ハ適当ナル場合ニ於テ便宜之ヲ授クヘシ

この教授要目に準拠して編纂された高木の教科書が，『新式算術教科書』をはじめとする，一連の『新式』教科書である．科目相互の連絡を図り，数学を一つのものとして学ばせようという意図がはっきりと見られる．『新式幾何教科書』（平面，立体の 2 冊からなる）は，高木の中学校用の幾何教科書としては最初のものである．高木の『新式』教科書の中扉には，邦文の表題に加えて英語が記されている．たとえば，『新式算術教科書』では “New Arithmetic” である．

『新式幾何教科書〔平面〕』の例言（明治 44 年 10 月）には，次のような文言がある．

> 題して平面幾何といふと雖も，従来算術にて授けたる求積の計算を包括す。
>
> 中等学科に於ける数学，特に幾何学の教授は二重の目的を有す，即ち幾何学上の知識を授くると共に，演繹推理の訓練を与ふべきものなり。而も従来稍前者を犠牲にして後者を偏重し過ぎたるかの観あり。此弊を矯めんことは編者の力を致したる所なり。
>
> 本書の内容に於て別に奇を弄し異を樹つる所なしと雖も，一二特に注意を請ふべき点を挙ぐれば，次の如し。
>
> 一　第一篇，第二篇は直線図形及び円の性質を論ず。此部分に於ては，特に厳密なる推理に練れしむることを主としたり。
>
> 又第二篇に於て，先づ円と直線及び二つの円の位置の関係を説きて，直に作図題に連続せり。是れ第一篇と作図題とを成るべく近接せしめんが為に外ならず。
>
> 二　第三篇は面積及び比例を論ず。長さ，面積又は其比を，其数値を離れて直に之を一つの量として取扱ふこと，多年の因習なるが如しと雖も，此方法は中等教育に於て決して完全に遂行せらるべきものに非ざるが故に，実際の教授は皮相的となり，徒に生徒の思想を混乱せしむるに終るべく，且つ算術及代数と幾何学との連絡を断ち，数学科の統一的教授の趣意に違背せるものなり。
>
> 是故に本書に於ては長さ，面積及び比の数値を用ふることに躊躇せず，通約すべからざる量の比は，無限小数を用ひて之を表はし，生徒の常識に訴へて，理解を確実ならしむることを期せり。
>
> 円周及び円の面積の計算に於ても，極限の概念の浅薄なる説明を避け，専ら常識を基礎となしたり。

三　巻末に附録として補習問題集を添ふ。其の中一，二には本文に関聯せる練習問題を補充するの用に供すべきものを集め，又三には調和列点，及図形の対称相似等に関するものを秩序的に配列して補習の用に供せり。

又別に定理の関係に関する簡単なる説明を載せ参考の資とせり。

冒頭の部分にある，中等教育に於ける幾何教授の目的と，演繹推理偏重については，寺尾壽が同様な趣旨のことを明治 29（1896）年に述べている[5]．項目二は，「ユークリッドの比例論」からの脱却の宣言である．通約すべからざる量の比を扱うに当たっては，無理数は有理数ではないが有理数でいくらでも近似できることを用いている．

『新式幾何教科書〔立体〕』「例言」（明治 44 年 12 月）には，次のように記されている．

編纂の趣旨は「平面幾何」の例言既に其大要を悉くしたりと雖も，尚二三の要点を擧ぐること次の如し。

一　第一篇及び第三篇の前半は純幾何学的の部分にして，直線，平面及び簡単なる曲面の性質を論ず。此部分に於ては厳密なる推理を主眼となしたり。

二　第二篇は多面体に関する求積の問題を説明す。此篇に於ては求積の計算の基く所を詳説し，而も成るべく数値を用ひて，ユークリッド式の抽象的論証の方法を避けたり。又多面体の幾何学的性質に関する事項は成るべく其説明を緊縮し，特に簡単なる事項は単に事実を掲げて，其証明を省略せり。此等は第一篇の応用として生徒をして自ら其証明を補充せしむるを宜しとす。

三　第三篇の後半は円壔，円錐，及び球の体積の計算を説明す。此部分に於ては，平面幾何に於ける円に関する求積の問題と同じく，専ら理会の確実を期し，強ひて高等数学的の厳密なる論証の形式を装ふの因習を蹈襲せず。

四　巻末に附録として補習問題集を載す。其中一二三は本文に掲げたる演習問題を補充するの用に供するものにして，四には空間に於ける図形の対称及び相似に関する，又五には球面三角形に関する，卑近なる定理を秩序的に排置し，授業時間の余裕ある場合に於て，問題排置の順序を追ひて此等の事項を教授するの便を図れり。

8．

高木の『新式幾何教科書〔平面〕』は，緒言には「本書の内容に於て別に奇を弄し異を樹つる所なしと雖も」と述べられているけれども，伝統にとらわれない斬新な工夫がいろいろと見られる，特色のある教科書である．菊池大麓の『初等幾何学教科書　平面幾何学』（初版は 2 分冊で，明治 21（1888）－22（1889）年）は，英国の幾何学教授法改良協会（Association for the Improvement of Geometrical Teaching，略称 AIGT）の Syllabus に基づいて編纂された，AIGT の幾何学教科書 *“The Elements of Plane Geometry”* によっているが，AIGT の教科書よりは厳密で，ユークリッ

---

[5]Rouché と Comberousse の共著 *“Éléments de Géométrie”* の平面幾何学の部分の樺正董（かば　まさただ，文久 3（1863）年－大正 14（1925）年）による邦訳『普通平面幾何学教科書』（明治 29（1896）年）に寺尾壽は序文を寄せ，その中で，「尋常中学校等ニ於テ幾何学ヲ課スルノ目的ハ二ツアリ：一ツハ幾何学其物ヲ教フル為ニシテ，一ツハ幾何学ヲ以テ生徒ノ精神ヲ錬磨スル為ナリ．此第二ノ目的ハ非常ニ重要ナルハ勿論ナレドモ，重キヲ此ニ置キ過ギテ却テ第一ノ目的ヲ忘ルヽ様ノ事アリテハ甚ダ宜シカラザルハ最モ覩易キ事ナリ．然ルニ近頃続々世ニ現ルヽ所ノ所謂英国派ノ幾何学教科書ヲ見ルニ，生徒ニ必要ナル幾何学的智識ヲ与フルノ点ニ於テ甚ダ不完全ナル者多キハ大ニ憾ムベキ事ナリ」と記している．

樺は寺尾壽について数学を学び，明治 18 年，第 1 回の教員検定試験に合格した人で，富山，岐阜，新潟で中学校に勤め，当時は陸軍幼年学校教官であった．高木貞治は岐阜中学校で樺に数学を教わっている（[9]，p. 227）．

ド寄りである．菊池は，編纂に当たってはフランスの数学書も参考にしている．これに対して高木の教科書は，ユークリッド『原論』の伝統にはとらわれず，Legendre や Rouché-Comberousse などのフランスの幾何学書の方法も取り入れ，加えて幾何学の（当時における）最近の進歩・発展も考慮に入れて編纂されている．ただし，Hilbert 流の「公理論的方法」はとっていない[6]．過度の厳密性は避け，直観や生徒の「常識」に訴えている部分もある．算術や代数との関連も図られ，算術や代数の知識を利用しているところもある．なお，同じ時期の林の幾何教科書『新撰幾何学教科書』は，菊池あるいは AIGT の教科書を基礎において編纂された書物であるが，内容の配列や説明を改めたり，算術や代数との連絡をはかるなどの工夫をしている．

(1)　高木の教科書では,「合同変換」や「順序」にかかわる事項が，はっきりと記されている．二つの公理

> 図形ハ其形及ビ大サヲ変ゼズシテ其位置ヲ変ズルコトヲ得。
> 二ツノ定点ヲ通ル直線ハ必ズ唯一ツアリ。

を述べた後に，次のように記している（原文では図が添えられているが，ここでは省略した）[7]．

> 故ニ二ツノ点ヲ共有スル直線ハ全ク相一致スベシ。又
> 　一ツノ直線ヲ其上ノ二ツノ点ガ他ノ直線ノ上ニ落ツルヤウニ置クトキハ，二ツノ直線ハ全ク相重ナル。
> 　一ツノ直線 XY ノ上ノ任意ノ一定点 A ガ他ノ直線 X′Y′ ノ上ノ任意ノ一定点 A′ ノ上ニ合スルヤウニ，此等ノ直線ヲ重ネ合ハスルコトヲ得。而モカヤウニ二ツノ直線ヲ重ネ合ハスル仕方ハ二通リアリ。即チ半直線 AX ガ半直線 A′X′ ノ上ニ重ナリ，従テ半直線 AY ガ A′Y′ ノ上ニ重ナルヤウニスルコトヲ得，又半直線 AX ガ A′Y′ ノ上ニ重ナリ，従テ AY ガ A′X′ ノ上ニ重ナルヤウニスルコトヲ得。是故ニ一致シ得ベキ二ツノ線分 AB，A′B′ ヲ重ネ合ハスルニモ，亦二通リノ仕方アリ。即チ A ハ A′ ト合ヒ，B ハ B′ ト合フヤウニスルコトヲ得，又 A ハ B′ ト合ヒ，B ハ A′ ト合フヤウニスルコトヲ得。

また，平面に関する公理を述べた際に，

> 平面ノ上ニアル直線ハ此平面ヲ其両側ナル二ツノ部分ニ分ツ。其一方ニアル一ツノ点ト他ノ一方ニアル一ツノ点トヲ連ヌル線ハ必ズ此直線ト交ハル。

と記され，ついで，次のように記されている（原文では図が添えられているが，ここでは省略した）．

> 　一ツノ平面ノ上ノ一ツノ半直線 AX ガ他ノ平面ノ上ノ半直線 A′X′ ト合スルヤウニ，此等ノ平面ヲ重ネ合ハスルコトヲ得。而モ之ヲナスニ二通リノ仕方アリ。即チ図ニ於テ甲ノ平面ノ陰影ヲ附ケタル一半ガ，乙ノ平面ノ陰影ヲ附ケタル一半ト重ナルヤウニスルコトヲ得[8]。又甲ノ平面ノ陰影ヲ附ケタル一半ガ，乙ノ平面ノ陰影ヲ附ケザ

[6]高木が公理的方法をとらなかったことについては，[13]，p.36 を参照．

[7]以下の引用は明治 44 年 12 月発行の初版（国立国会図書館所蔵）によった．初版本は教科書の検定出願に用いたもので，実際の検定済教科書は修正版である（初版本には編輯者の不手際によると思われるミスもある）．

[8]図で陰影が附けられているのは，直線 AX または A′X′ で限られた半平面の中の一つである．

> ル一半ト重ナルヤウニスルコトヲ得。（甲ノ平面ヲ其ノママ乙ノ平面ノ上ニ置クコトヲ得，又甲ノ平面ヲ裏返シテ之ヲ乙ノ平面ノ上ニ置クコトヲ得）[9]。
>
> 平面上ノ一ツノ直線ヲ折目トシテ平面ヲ折リ返シ，此直線ノ一側ヲ他ノ一側ノ上ニ重ヌルコトヲ得。

とある．これは,「図形の移動」だけではなく,「平面の合同変換」の考えにつながる表現である．そして巻末の「補習問題集」の中には，平面の合同変換，相似変換そのものに関わる問題が系統的に配列されている．当時の幾何の教科書は,「図形の移動」の範囲に止まっていて,「平面の合同変換」の考えについては記されないのが普通であった．

なお，三角形の章でも，

> 三角形ノ三ツノ辺ハ平面ノ一部分ヲ囲メリ。之ヲ三角形ノ内部トイフ。三角形ノ内部ハ即チ其三ツノ角ノ内部ノ共通ノ部分ナリ。
>
> 三角形ノ内部ノ一点ト外部ノ一点トヲ結ビ付クル線（直線，折線又ハ曲線）ハ三角形ノ境界ト少クトモ一ツノ点ヲ共有ス。特ニ三角形ノ一ツノ角ノ頂点ヨリ其内部ニ引ケル半直線ハ，其対辺ノ上ノ一点ヲ通過シテ三角形ノ外部ニ出ヅベシ。

と記されているが，これはPaschの公理に関連したことがらを述べるとともに，生徒の常識に訴えて，Jordanの曲線定理の特別な場合を述べたものと見ることができる．

なお，林の教科書『新撰幾何学教科書［平面之部］』には，公理の一つとして「平面ノ一部分ハ其中ニ在ル任意ノ直線ヲ折目トシテ之ヲ折返シ他ノ部分ニ重ヌルコトヲ得」が記されている（明治45年版による，同書，p. 7）．

(2)　いくつかの定理や例題には複数の証明や解法が記されている（これだけならばほかの教科書でもそうである）．Pythagorasの定理には二通りの証明がつけられている．最初に示されているのは，直角をはさむ二辺の和を一辺とする正方形が，斜辺を一辺とする正方形と四つの合同な直角三角形とに分けられることを利用するもので，次に述べられているのが，ユークリッドの原論に記されている伝統的な証明である．

高木は，後に「Newton，Euclid，幾何読本」（1938年11月，後に『数学の自由性』に所収）において，この第一の方法を，ピタゴラスの定理の再発見の方法（の一つ）として示し,「代数・幾何の融合」,「数学連帯性の雛人形！」と述べ，第二の，原論にある証明については,「伝統の威力は恐ろしい！」と述べた後に，この証明で見せる手際のよい所は，第一の方法などの比ではないといい，原論にある証明について,「ああいう証明を壮麗（elegant）な証明というのだ．それは巧妙な細工だが，発見の過程を見せる積もりはないのだ．だからSchopenhauerのように，あの証明が直観的でないからEuclidはいけないと言うのは，それが技巧的であるところを不満に思うのであろうが，その批難は当たらないね．Euclid原本は論理的・系統的を狙っているのだから，少年ないし老年向きの幾何読本とは違う」と述べている．

なお,「Newton，Euclid，幾何読本」には，三角形の角を測ることによって三角形の内角の和を再発見させるという方法についての批判が記されているが，これは国定教科書『尋常小学算術』

[9] ここでは半平面とその境界の一部である半直線が用いられている．後に，彌永昌吉は，安倍亮との共著論文において，これを一般化した半空間の列を用いて運動群の特徴づけをし（S. Iyanaga – M. Abe, Über das Helmholtzsche Raumproblem I, II, Proc. Imperial Acad. Japan, Vol. 19 (1943)），それを用いて n 次元ユークリッド幾何学を組み立てている（[7]）．彌永はこれをHelmholtzの着想によるものであると記している．この方法は，簡易化した形で，彌永昌吉編の高等学校の教科書に取り入れられている（彌永昌吉編『高等学校数学Ｉ　幾何学』，東京書籍，1955）．この教科書に記された公理の一つは，ここに引用した高木のものと類似の内容である．

(いわゆる緑表紙教科書) でとられた方法への，数学者の立場からの批判である (三角形の内角の和は第 4 学年の内容で，この第 4 学年用の教科書はこの年から用いられた).

(3) 図形に関する計量の問題 (計算問題) がかなり入っているのも特徴であるが，加えて，

85. 作図ニヨリテ四則及ビ開平ノ問題ヲ解クコト
86. 作図ニヨリテ二次方程式ヲ解クコト

という二つの節が設けられていることは注目してよいであろう．当時の幾何の教科書で，このような表題の節があるのは異例である．第 85 節の最後には，

> 長サノ単位ヲ知リテ，随意ノ有理数，又ハ有理数ノ平方根，又ハ一般ニ 1 トイフ数ヨリ四則及ビ開平ノミヲ用ヒテ作リ出シ得ベキ正数ヲ数値トスル線分ヲ作ルコトヲ得，特ニ係数ガ有理数ナル二次方程式ノ実根ヲ数値トセル線分ヲ作ルコトヲ得。

と記されている．

(4) 巻末に「補習問題集」が付けられているが，その中の「三 雑題」の前半には，調和列点 (調和点列)，極，極線，Menelaus，Ceva，Desargues，Pascal，Brianchion の定理など，いわゆる「近世幾何学」(射影幾何学) に関連した内容がまとまられている．これらの事項は，他の教科書でもどこかで問題の形で扱われていることが多いが，高木の教科書は，これらの事項をまとめて，系統的に配列してあることが特徴である (したがって，教授者のほうで，もしそのつもりがあれば，本文の内容の補充とともに，射影幾何学へつながるように授業をすることも可能である).

「雑題」の後半は，対称性からはじめて，平面における合同変換・相似変換の性質 (本質) についての問題が，系統的に配列されている.「図形の移動」だけではなく，「(二次元の) 空間の変換」という考え方と，平面の合同変換や相似変換の構造を調べるという態度がはっきりと出ている．合同変換に関する問題の最後の二つは，次の通りである．

> **184.** 図形 F' ハ O_1 ヲ中心トシテ，又 F'' ハ O_2 ヲ中心トシテ同一ノ図形 F ト対称ノ位置ニアルトキハ，平行変位ニヨリテ F' ヲ F'' ノ位置ニ来ラシムルコトヲ得 (其平行変位ノ方向ハ O_1O_2 ト同ジク，距離ハ O_1O_2 ノ二倍ニ等シ)。
>
> **185.** 図形 F' ハ x ヲ軸トシテ，又 F'' ハ y ヲ軸トシテ同一ノ図形 F ト対称ノ位置ニアルトキハ，x, y ノ交点ヲ中心トシテ F' ヲ廻転セシメ，之ヲ F'' ト重ヌルコトヲ得。(廻転ノ角ハ，x, y ノ間ノ角ノ二倍ニ等シ)。
>
> 又 x, y ガ互ニ平行ナルトキハ，平行変位ニヨリテ F' ヲ F'' ノ位置ニ来ラシムルコトヲ得。

これらは当時の幾何教科書の問題としてはまったく斬新なものであった．

巻末の「補習問題集」は時間に余裕のある場合，もしくは補習科の教材として編纂されたものであるが,「雑題」，特に後半の部分を，著者の意図に則って取り扱い，教育効果のある授業をするためには，教師のほうにしっかりした学力 (と教育技術) が求められる教科書であると考える．

(5) 高木の幾何教科書では，平行線の公理は「与ヘラレタル点ヲ通リ，与ヘラレタル直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル」であるが，高木は後に,『数学雑談』(初出は共立社「輓近高等数学講座」(1928 – 29)) の「平行線ノ話」において,「矩形の性質」，すなわちサッケリ (Saccheri) の「直角ノ仮設」:「直線 AB ノ同ジ側ニ等長ナル垂線 AC, BD ヲ引イテ CD ヲ結ベバ AC, BD ハ CD ニ垂直デアル」を平行線の公理の代用とすることを提案している．そして，次のように述べている．

> 初等幾何学ノ平行線論ハ改造ヲ要スル．シカシ其處ニハ未ダ洗練ガナイ．改造ノ試ミトシテ本邦ニ流布シテヰルモノデ筆者ノ囑目シタモノガ二ツアル．一ツハ独逸ノ中学教員ノ手ニ成ツタモノデ，一ツハ仏蘭西ノ著名ナル数学者ノ筆ノスサミデアル[10]．其處ニ洗練ガアルデアラウカ，其處ニ投ゲ遣リガナイデアラウカハ筆者ガ言フヲ欲セヌ所デアル．

高木の『新式幾何教科書〔立体〕』も，平面幾何学と同様に特色のある教科書であるが，紙数の関係でここでは紹介を省略する．

9．

高木の教科書で幾何を学んだ一人に，寺阪英孝がある．寺阪は，高木の追想録『追想　高木貞治先生』([13]) に寄せた「行間を読み取れ」で，次のように記している（同書，p. 46）．

> 私が初めて幾何を知ったのは、実は高木先生編の幾何学教科書であった。二辺夾角の合同定理は「三角形を重ね合わせて証明する」のが証明なのか、と初めて知った。私は以後出て来る定理を次々と自己流に証明して喜んでいるうち、とうとう幾何のとりこになってしまった。なお、先生の教科書の巻末附録にあった「無理数 a, b の冪 a^b 」の説明[11] を読んだのも、感激であった。この教科書はよくできていた。

一冊の本との出会いが，生涯の方向を決めてしまったといってよいのではないかと思われる．なお，同書では，菅原正夫も高木の教科書で幾何を学んだことを述べている（p. 208）．

松原元一は，大著『日本数学教育史』の第 IV 巻 ([8]) において，高木の算術と代数の教科書について簡単に紹介している．高木の『普通教育代数教科書』の上巻の「例言」の中の「普通教育に於ける代数学教授の目的は，生徒をして文字を使用して卑近なる問題を自由に解釈する能力を取得せしむるを以て足れりとすべし」を引用し,「卓見である」と記している（[8]，p. 243）．『新式算術教科書』については,「算術教科書としては，......林鶴一らの本ほどには使用されてはいなかったにしろ，よく使われたものである」と記し,「簡にして要を得た教科書である」と述べている（[8]，pp. 619 – 620）．しかし，松原は高木の幾何教科書については言及していない．

幾何教科書についても，高木の教科書は，林の教科書ほどには用いられなかった．林のほうが使いやすく，上級学校への受験準備の上でも都合がよかったためと思われる．高木の幾何教科書に対する「評価」の一つの例としては，この教科書が東京府立第一中学校（現在の東京都立日比谷高等学校）で，大正 3 年から 14 年以上にわたり継続して使用されたことがあげられる．使用されたのは「修正第 3 版」である（14 年以上と記したのは，同校での昭和 4 年度以降数年間の使用教科書に関する資料が残されていないことによる）．その間に幾何以外の数学の科目の教科書は改められているので，高木の幾何教科書のよさを評価して，毎年継続して使用されたと考える．上に名前を出した菅原，寺阪とも当時の生徒である．他にもその当時の生徒で，大学は数学科へ進んだものが数名ある．少し贔屓目に見る（あるいは，色眼鏡をかけて見る）ならば，数学科を志望することについては，高木の教科書が見せている数学の魅力が，なにがしかの影響を与えているのではないかと思うのである．しかし，高木の幾何教科書は，林のものとくらべれば「一般

---

[10] これは，Behrendsen と Götting の共著，森外三郎訳『新主義数学』(1915（大正 4）年）と，Borel 著，佐藤良一郎訳『ボレル幾何学』(1925（大正 14）年）とである．
[11] これは代数の教科書のほうの附録であると思われる（未確認）．

向き」ではなかった．いうまでもなく，高木の後年の著作『代数学講義』,『初等整数論講義』,『解析概論』とも，数学の魅力，数学のおもしろさを伝える名著である．

高木は,「わたしの好きな数学史」（1936 年 7 月，後に『数学の自由性』に所収）において，次のように記している．

> わたしの好きな数学史は正確なる史実の記録である．それは読み物としては乾燥無味でなければならない．数学史論は別である．史論は各人各様でなければならない．わたしの好きな数学史論は — 面白い史論である．何が面白い史論であるかは一言を以て蔽い難いが，面白くない史論なら，すぐにも一例を挙げることが出来る．それは温故知新流の丁髷物で，事後に於て，その事の必然性に安直な理屈を附けたがる野次馬式のやつである．— こう書いて反省してみると実は私も折々，こういう安直な史論をやりたがるようである．それはしかし座興である．それを裃を着けて青筋を立ててやられると閉口するのである．

この小論は，どうやら「面白くない史論」になってしまったようである．

参考文献

[1] 高木貞治『新式算術講義』，博文館，1904；ちくま学芸文庫，2008.

[2] 高木貞治『高等教育代数学』，東京開成館，1906.

[3] 高木貞治『代数学講義』，共立社，1930.

[4] 高木貞治『近世数学史談及雑談』，共立社，1938.

[5] 高木貞治『数学の自由性』，ちくま学芸文庫，2010.

[6] 藤澤利喜太郎講述『数学教授法講義筆記』，大日本図書，1900；復刻版：教育出版センター，1986.

[7] 彌永昌吉『幾何学序説』，岩波書店，1968.

[8] 松原元一『日本数学教育史 IV　数学編 (2)』，風間書房，1987.

[9] 『日本の数学 100 年史』上，岩波書店，1983.

[10] 野崎昭弘「高木貞治と数学教育」，岩波講座『現代数学の展開』月報，No. 11（2002）.

[11] 野崎昭弘「数学教育と高木貞治先生」,『数学通信』15 巻 2 号（2010），28 – 33.

[12] 上垣　渉「高木貞治の数学教育論」,『数学教育史研究』3（2003），19 – 23.

[13] 高木貞治先生生誕百年記念会『追想　高木貞治先生』，1986.